Cours du 19.04.2021

lundi, 19 avril 2021 18:29

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_{2\times 2} \vec{x}_{2\times 1} = \vec{b}_{2\times 1}}$$

$$\boxed{A_{n\times n} \vec{x}_{n\times 1} = \vec{b}_{n\times 1}}$$

Comment trouver les solutions à un système d'équations de ce type ??

Système SUR-déterminé (plus d'équations que d'inconnues) => il se peut qu'il n'y ait AUCUNE solution...

Système SOUS-determiné (plus d'inconnues que d'équations) => il y a une INFINITE de solutions.

1 seuls solution (n équations n inconnues - il se peut tout de même qu'il n'y ait AUCUNE solution ou une infinité).

2 équations 2 inconnues : le croisement de deux droites !

 $\Rightarrow$ pas de solution

 $\Rightarrow$ 1 solution

 $\Rightarrow$ ∞-té de sol.

$A = \left(\begin{smallmatrix} \searrow & 0 \end{smallmatrix} \right)$ (Triangulaire INFÉRIEUR)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \overbrace{0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots}^{0} = b_1 & \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \square \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 \ldots = b_2 & \Rightarrow x_2 = \Delta \\ a_{31}\square + a_{32}\Delta + a_{33}x_3 + 0 = b_3 & \Rightarrow b_3 = \ldots \end{cases}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ faire "dépaillement" ligne par ligne !

et Si $A = \left(\begin{smallmatrix} \searrow \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ (Triangulaire SUPÉRIEURE)

dépaillement "inverse"

$A_{n \times n}$ quelconque $\Rightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} \searrow & 0 \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \searrow \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

Théorème : Si A est une matrice "inversible", alors il existe deux matrices L (triangulaire inférieur "lower") et U triangulaire supérieure (upper) telles que

$A = L \cdot U$ Factorisation LU.

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{LU \cdot \vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$

$\vec{y}$ est solution de $L\vec{y} = \vec{b}$

$\left(\begin{smallmatrix} \searrow & 0 \end{smallmatrix} \right) \cdot \vec{y} = \vec{b}$

$(\triangle^{0}) \cdot y = b$

(1) on trouve "facilement" $\vec{y}$ par dépouillement !

$\vec{y}$ est solution de $U\vec{x} = \vec{y}$

$(\overline{\triangle}) \vec{x} = \vec{y}$

(2) $\vec{X}$ est trouvé par dépouillement INVERSE !

Lo est-ce la bonne solution ?

OUI ! Si $U\vec{x} = \vec{y}$

$$A\vec{x} = L \cdot U \cdot \vec{x} = L \cdot \vec{y} = \vec{b}$$

(2)

SI on ne trouve PAS de factorisation LU, cela signifie qu'il n'y a pas de solution ou alors une infinité de solutions.
Si on trouve une factorisation L-U pour laquelle on trouve des 0 sur la diagonale, alors il y a une infinité de solutions !!!

TOUTE équation linéaire ou SYSTÈME d'équations linéaires peut s'écrire sous la forme d'un produit matrice-vecteur = vecteur

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Cela ne s'applique PAS aux équations NON-linéaires.

Linéaire = Polynôme de degré 1 $(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots = b_1)$

PAS Liné. $\left(\begin{array}{l} a \cdot \sqrt{x} \text{ PAS linéaire} \\ x^2 \\ 2^x \\ \log(x) \end{array} \right.$

La procédure pour trouver la factorisation L-U de A s'appelle la méthode du PIVOT de GAUSS.
Cette méthode a d'autres applications sur les matrices…

Entrée : on a une matrice A carrée
Sortie : la factorisation L-U de A OU la preuve que A n'est "pas" inversible.

Initialisation : "Accoler" une matrice "identité" à gauche de A

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I_{3\times3}}\right|\left.\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & 2 & 2\end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Pour la line i = 1…n :
- Sélectionner le pivot a_{ii}
- "éliminer" TOUS les coefficients dans la colonne i pour les lignes j=i+1,….n en ajoutant la ligne "i" à la ligne "j" mettre à 0 !
- "mettre" à jour le coefficient ij dans la matrice de gauche

$i=1$

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ \boxed{0} & 1 & 0\\ \boxed{0} & 0 & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\overset{a_{11}}{1} & 1 & -1\\ \cancel{1}\,0 & -2 & -2\\ \cancel{-3}\,0 & 2 & 2\end{matrix}\right) \begin{matrix}l_2 \leftarrow l_2 - 1\cdot l_1\\ l_3 \leftarrow l_3 + 3\, l_1\end{matrix}$$

$i=2$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ \square & 1 & 0\\ \triangle & \square & 1\end{matrix}}_{L}\right|\left.\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 0 & \omega & ?\\ 0 & 0 & ?\end{matrix}}_{U}\right)$$

FIN

$$\begin{array}{rl} \boxed{-1}\cdot(1 \quad 1 \quad -1) & l_1\\ +\ \ 1 \quad -2 \quad -2 & l_2 \leftarrow\\ \hline 0 \quad -3 \quad -1 & l_2 \boxed{-1}\cdot l_1 \end{array}$$

$\times(-1)$ $\times(-1)$

$$\begin{array}{rl} \boxed{+3} & (1 \quad 1 \quad -1)\\ + & (-3 \quad 2 \quad 2)\\ \hline & \underline{0} \quad 5 \quad -1 \end{array}$$

$i=1$

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ \boxed{+1} & 1 & 0\\ \boxed{-3} & 0 & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 5 & -1\end{matrix}\right)$$

$\times(-1)$

$l_2 = -1 \cdot l_1$

$\times(-1)$

$$i=1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ +1 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrr} & & \\ +(-3 & 2 & 2) \\ \hline 0 & 5 & -1 \end{array}$$

$\times(-1)$

$5 + \Delta(-3) = 0$

$\Delta = \dfrac{-5}{-3}$

pivot

$$i=2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \quad l_3 \leftarrow l_3 + \Delta \cdot l_2$$

$$\begin{array}{rrrr} \frac{5}{3} & (0 & \boxed{-3} & -1) \\ + & 0 & 5 & -1 \\ \hline & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{array}$$

$\times -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$L \qquad U \qquad$ FIN

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}}_{U} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{-2} \\ \boxed{-3} & \boxed{2} & \boxed{2} \end{pmatrix} = A \checkmark$$

Omais Jean Yannis Gaël Daniel Lauana

Stéphane Arthur Charlotte

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{que vaut } \vec{x} \text{ ?}$$

$$① \quad L\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

① $L\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 2 & \Rightarrow y_1 = \underline{2} \\ -y_1 \quad y_1 + 1\cdot y_2 + 0\cdot y_3 = 1 - y_1 & y_2 = 1 - y_1 = 1 - 2 = -\underline{1} \\ -3y_1 - \frac{5}{3}y_2 + y_3 = 0 & y_3 = 0 + 3y_1 + \frac{5}{3}y_2 \end{cases}$$

$$= 3\cdot 2 + \frac{5}{3}(-1) = 6 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13/3 \end{pmatrix}$$

② $U\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13/3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 2 - \frac{7}{8} + \left(-\frac{13}{8}\right) = \frac{16}{8} - \frac{7}{8} - \frac{13}{8} = -\frac{1}{2} \\ \qquad \Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{2}} \\ -3x_2 - \left(-\frac{13}{8}\right) = -1 \Rightarrow -3x_2 = -1 - \frac{13}{8} = -\frac{21}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{8} \\ -\frac{8}{3}x_3 = \frac{13}{3} \Rightarrow x_3 = -\frac{13}{8} \end{cases}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/8 \\ -13/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\min \vec{c}^T \vec{x}$

SIMPLEXE

s.c. $A\vec{x} = \vec{b}$

$/ x$

$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}\cdot b$

$ax = b \Rightarrow x = a^{-1} \cdot b$

La inverse de $a = \frac{1}{a}$ $\boxed{⚠ \; a \neq 0 \;!}$

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{a}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad A$ peut être inversible $\Rightarrow A^{-1}$ "inverse de A"

$$\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{A^{-1}} = \underset{n\times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n\times n}{A} = I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

A^{-1} existe (A est inversible) si : A est carrée

⚠ si ~~(et seulement si)~~

C'est une condition NECESSAIRE mais PAS SUFFISANTE !!!

Les conditions nécessaires et suffisantes suivantes sont équivalentes

A. La seule solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ est $\vec{x} = \vec{0}$

B. La famille des vecteurs COLONNE de la matrice forme une famille libre….

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{array} \end{array}$$

la seule solution à

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \ldots + = \vec{0}$$

est $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$

C. La famille des vecteurs LIGNE est une famille libre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad (0 \; 2 \; 4) = 2 \cdot (0 \; 1 \; 2)$$

$\Rightarrow$ A n'est PAS inversible !

($A\vec{x} = \vec{b}$)

B et C sont la définition d'une matrice de "rang plein"

B et C sont la définition d'une matrice de "rang plein".

D. ***Déterminant*** de la matrice A n'est pas 0 !!!

$$\det(A) = |A| = 0$$

2x2 : $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

3x3 : $$\begin{array}{cc} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \end{array} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$